Prueba final de Análisis Probabilístico de Algoritmos

Respuestas

1. (1 pt) Respecto a la complejidad de los algoritmos basados en fusiones, la entropía de rachas $\mathcal{H}$ permite obtener

   A. <u>una cota mínima</u> B. una cota máxima C. una aproximación D. la media.

2. (1,5 pts) Los tiempos de búsqueda de Linear Probing se degradan más rapidamente que los de Random Probing cuando la tasa de ocupación α es grande. Dar una interpretación intuitiva.

   Respuesta. Recordamos que Linear Probing corresponde a la secuencia de búsqueda siguiente: si la celda está ocupada, ir a la siguiente. El problema de Linear Probing, cuando α es grande, es que tienden a formarse segmentos ocupados. Este no es el caso en Random Probing, que salta a posiciones aleatorias.

3. (2 pts) Explicar por qué puede ser útil sesgar los if's de un algoritmo para que sean **True** (o **False**) con probabilidad mayor que $1/2$.

   Respuesta. El pipeline del procesador permite acelerar la ejecución, ejecutando partes de varias instrucciones en paralelo. La presencia de un **if** requiere la predicción de qué "rama" será ejecutada después. Si un **if** es **True** (o **False**) con probabilidad $1/2$, este resulta imposible de predecir. En cambio, si este fuera predecible, esto puede resultar (quizás) en una aceleración de los tiempos ejecución.

4. (2,5 pts) Consideremos una clase combinatoria $\mathcal{A}$ que representa funciones como árboles binarios con las siguientes características:

   - hojas decoradas con los números $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ o un símbolo de variable x.
   - nodos internos decoradas con los operadores $+$ o $\times$,
   - el tamaño (o talla) igual al número de nodos internos (las hojas tienen talla 0).

   Dar una especificación combinatoria para $\mathcal{A}$. Encontrar la función generatriz $A(z)$.

   [La especificación puede ser recursiva, y utilizar el elemento vacío $\mathcal{E}$ y/o el átomo $\mathcal{Z}$.]

   Respuesta. La especifiación es:

$$\mathcal{A} = \mathbf{0} + \mathbf{1} + x + \{+\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \{\times\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}\,.$$

   Usando los átomos de talla uno $\mathcal{Z}$, y de talla cero $\mathcal{E}$, podemos también escribir:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{Z} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} + \mathcal{Z} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}\,.$$

Esto se traduce en:

$$A(z) = 3z^0 + 2z(A(z))^2 \ .$$

Resolviendo, y notando la solución que tiene sentido en $z = 0$, obtenemos

$$A(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 24z}}{4z} \, .$$

5. (3 pts) Aplicando fracciones simples obtenemos

$$f(z) = \frac{z+3}{(1-z)\cdot(1-2z)^2} = -\frac{8}{1-2z} + \frac{7}{(1-2z)^2} + \frac{4}{1-z} \, .$$

Encontrar una fórmula para $a_n = [z^n]f(z)$. Dar un asintótico simple para a_n.

Respuesta. Tenemos

$$[z^n]f(z) = -8 \cdot 2^n + 7 \cdot (n+1) \cdot 2^n + 4 \, .$$

usando

$$[z^n]\frac{1}{1-2z} = 2^n, \quad [z^n]\frac{1}{(1-2z)^2} = (n+1)\, 2^n, \quad [z^n]\frac{1}{1-z} = 1 \, .$$

El término dominante es $7 \cdot (n+1) \cdot 2^n$, así $[z^n]f(z) \sim 7n\, 2^n$.