# Ejercicios del tercer set de slides

1. Funciones generatrices
2. Números de Stirling
3. Expresiones regulares
4. Sección de una función generatriz

# Funciones generatrices

## Ejercicio

Usar funciones generatrices para probar las siguientes identidades:

a) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

c) $\sum_{k\geq 0} \binom{k}{n-k} = f_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, donde $(f_n)$ son los números de Fibonacci.

# Números de Stirling

Los números de Stirling de segunda clase $\left\{ n \atop k \right\}$ cuentan la cantidad de particiones de un conjunto de $n$ elementos en $k$ subconjuntos (no vacíos).

a) Probar que[1] $\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}$

b) Deducir que $\sum_{n\geq 0} \left\{ n \atop k \right\} z^n = \frac{z^k}{(1-z)(1-2z)\ldots(1-kz)}$.

c) Utilizando fracciones simples, obtener una fórmula para $\left\{ n \atop k \right\}$.

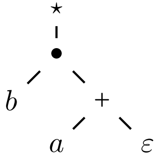
[1] Escribimos $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ si $n < k$ o $k < 0$. Por convención $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$.

# Expresiones regulares como árboles

Consideremos una clase combinatoria $\mathcal{R}$ que representa las expresiones regulares como árboles unarios-binarios con:

- hojas decoradas con las letras "$a$", "$b$" o la palabra vacía "$\varepsilon$".
- nodos internos binarios decoradas con los operadores unión "$+$" o concatenación "$\bullet$",
- nodos internos unarios decoradas con el operador Kleene-star "$\star$".

Dar una especificación combinatoria. Determinar la función generatriz suponiendo que la talla es la cantidad de nodos.




$$(b \cdot (a + \varepsilon))^{\star}$$

# Sección de una función generatriz

Este ejercicio responde a la pregunta siguiente:

**Pregunta**

Dada una OGF $F(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)\, z^n$, y un $q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$
¿cómo obtener una fórmula para la *sección* $\sum_{n\geq 0} a(n\,q)\, z^{n\,q}$ ?

a) Sea $\omega = \exp(2\pi i/q)$, satisface $\omega^q = 1$, y además $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{q-1}$ son todas las raíces $q$-ésimas de la unidad. Probar que

$$\sum_{n\geq 0} a(n\,q)\, z^{n\,q} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} F(z\omega^k)\,. \tag{1}$$

b) Obtener una fórmula para $\sum_{n\geq 0} a(n\,q+r)\, z^{n\,q+r}$ con $r \in \{0, \ldots, q-1\}$.