Ejercicios del segundo set de slides

1. Esperanza de la cantidad de records

2. Cadenas de Markov

Cantidad de records

Realizar la prueba alternativa para la cantidad de records.

Prueba alternativa

a) Mostrar que $e_n = \mathbb{E}[R_n]$ satisface la recurrencia

$$e_n = 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e_j \, ,$$

para $n \geq 1$.

b) Resolver la recurrencia para demostrar que $e_n = H_n$.

c) Sea $d_n := \mathbb{E}[R_n^2]$. Mostrar que, para $n \geq 1$,

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} d_j + 2 \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e_j + 1 \, .$$

d) Resolver la recurrencia para demostrar que $d_n = H_n + 2 \sum_{j=2}^{n} \frac{H_{j-1}}{j}$.

Cadenas de Markov

Consideramos una cadena de Markov $(X_0, X_1, \ldots)$ con estados $S = \{s_1, \ldots, s_K\}$ y matriz de transición P.

Una distribución de probabilidad π sobre S se dice reversible sii

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i} \,.$$

a) Probar que una distribución reversible es estacionaria.

b) Consideramos una cadena tal que $P_{i,j} = 0$ para $|j - i| \geq 2$, y $P_{i,j} > 0$ para $|j - i| \leq 1$. Estos se llaman **procesos de nacimiento-muerte**.

   Notamos que los predictores vistos en el curso son de esta forma.

   – Probar que se aplica el Teorema Ergódico.

   – Construir una distribución reversible. Concluir que esta es *la* distribución estacionaria.